Operátor nabla

Hamiltonův operátor – nabla:
v kartézských souřadnicích

$$\vec{\nabla} = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)$$

Gradient

$f(\vec{r})$ - skalární pole (skalární veličina závislá na polohovém vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$)

$$\mathrm{grad}\, f \equiv \vec{\nabla} f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big)$$

Gradient (derivace funkce f) má směr nejprudšího růstu funkce f. Skalární součin $\vec{n}.\vec{\nabla} f$ (kde $|\vec{n}| = 1$) má význam derivace f ve směru $\vec{n}$.

Divergence

$\vec{F}(\vec{r})$ - vektorové pole

$$\mathrm{div}\, \vec{F} \equiv \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

div $\vec{F} = 0$ - bezzřídlové pole (např. mag. indukce)
div $\vec{F} > 0$ - “zřídlo” (např. gravitační pole v místě hmotného bodu, el. pole v místě kladného náboje)
div $\vec{F} < 0$ - např. el. pole v místě záporného náboje

Gaussova-Ostrogradského věta:
S je uzavřená plocha, ohraničující objem V, pak platí

$$\oint_S \vec{F}(\vec{r}).d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{F}(\vec{r})\, dV \ .$$

Rotace

$$\mathrm{rot}\, \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \Big(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\Big)$$

Stokesova věta:
l je uzavřená křivka, ohraničující plochu S, pak platí

$$\oint_l \vec{F}(\vec{r}).d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}).d\vec{S} \ .$$

Platí:
$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$
$\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{F} = 0$

Laplaceův operátor

$$\triangle \equiv \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$\triangle f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$$
$$\triangle \vec{F} = (\triangle F_x, \triangle F_y, \triangle F_z)$$

Platí:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{F} - \triangle \vec{F} \ .$$

Laplacián v některých typech křivočarých souřadnic:

Polární: $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

Cylinrické: $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Sférické: $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

Kmenová funkce

Kdy k zadané funkci $\vec{F}(\vec{r})$ existuje fce $f(\vec{r})$ taková, že $\vec{F} = \operatorname{grad} f$? (f se nazývá kmenová funkce).
Protože $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, musí platit $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$. Analogické vztahy získáme pro ostatní kombinace souřadnic a 3 získané podmínky můžeme zapsat rovnicí

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \ ,$$

která je nutnou a postačující podmínkou pro existenci kmenové funkce.

V tom případě platí pro libovolnou křivku C, která začíná v bodě $\vec{r}_1$ a končí v bodě $\vec{r}_2$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1) \ .$$